第３学年１組　数学科

生徒が自ら数学的知識を獲得していく授業

－ 関数 $y=ax^2$に関する学習を通して －

竹内　恭平

今年度「論理的・批判的思考により数学的知識を追発明したり、新たな価値を創造したりすることができる生徒」の育成に向けて、これまでの基礎・基本を教授して適用題を解かせることによって習熟を図る授業から、生徒が協働によって数学的知識を獲得していく授業、つまり『生徒が主役』の授業への転換を図っている。

第３学年の単元『関数 $y=ax^2$』で実践を行った。まず、一次関数から三次関数までの一部中学校範囲を超えた関数との比較から、関数 $y=ax^2$に関する概念形成を図る。次に、「自由落下」という現実の世界の文脈、そして、「動点問題」という数学の世界の文脈で、獲得した概念の補強を図るという設定で単元を構成した。

今年度、他学年の関数の単元においても同様の構成で授業実践を行った。基本事項すらも文脈の中で習得していく「ロングスパンの単元構成」に取り組み、生徒が教材に向かう姿勢に変化が見られた。今後は今年度以上に計画的に単元を構成し、さらに単元間のつながりや学年間のつながりを意識した、より長いスパンでの授業ができるように教材研究を進めていきたい。

１．はじめに

今年度、数学科は「論理的・批判的思考により数学的知識を追発明したり、新たな価値を創造したりすることができる生徒」の育成を目指した。平成２９年告示中学校学習指導要領解説数学編においても、『「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程」といった数学的に問題発見・解決する過程を学習過程に反映させることが重要である』とある。基礎・基本を教授して適用題を解かせることによって習熟を図る授業から、生徒が協働によって数学的知識を獲得していく授業へ、そして、その概念形成や課題解決に用いられた数学的な見方・考え方を顕在化させて育む授業、生徒の疑問を大切にして、場合によっては教科書外の数学的知識を創造する手助けをする授業を心掛けている。

第３学年の単元『関数 $y=ax^2$』では、健司の学びを中心にどのような学習が展開されていったかを、次章から記述する。なぜ、健司に焦点を当てたのかというと、決して数学が得意ではないものの、問題の状況から帰納的に仮説を立てる力やその着眼点には目を見張るものがあると感じたからである。

平方根の単元で「 $\mathrm{n}<\sqrt{\mathrm{a}}<\mathrm{m}$ を満たす整数ａの個数」を問う問題に対して、「$\mathrm{n}+\mathrm{m}-1$個」という予想を健司は立て、うれしそうに報告してくれた。実際は、「$\mathrm{m}-\mathrm{n}=1$」の場合に限られるが、教科書外の数学的知識であり、健司の発見は級友から称賛された。

２．学びの実際

(1) 関数 $y=ax^2$に関する概念形成

（第１時〜5 時）

啓林館の教科書では１年生の関数の導入で用いられている以下の課題を使って概念形成を図った。

> １辺１６ｃｍの正方形の４すみから、同じ大きさの正方形を切り取る。切り取る正方形の１辺の長さを変えたときに、それにともなって変わる数量にはどのようなものがあるか。

この題材を３年生で用いる意図としては、前単元の二次方程式で同様の問題を扱っており、同一文脈でのロングスパンの学習が構築できること、体積や底面積などを扱うため、三次関数や原点を通らない二次関数に触れることができ、それらとの比較から、本単元の関数 $y=ax^2$（原点を通る二次関数）の特徴を浮き彫りにできることにある。

前述の課題に対して、生徒から提案された様々な数量を各班で以下のように分担し、式･表･グラフ･特徴などをワークシートにまとめた。

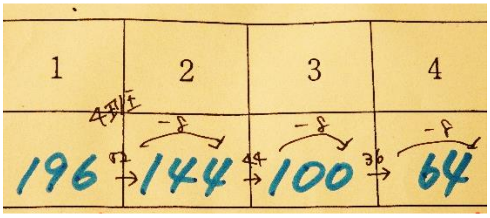
> １班…体積（三次関数）
> $$y=x(16-2x)^2$$
> ２班…底面積（原点を通らない二次関数）
> $$y=(16-2x)^2$$
> ３班…切り取る正方形の総面積（関数 $y=ax^2$）
> $$y=4x^2$$
> ４班…側面積（原点を通らない二次関数）
> $$y=4x(16-2x)$$
> ５班…切り取る正方形の１辺の長さ（一次関数）
> $$y=16-2x$$

次に、情報を共有し、自他の比較をするためにワークシートを回覧し、気付いたことや疑問に思うことを話し合い、そのワークシートに書き込む班活動を行った。同時期に行った他学年の関数の授業では、同様のワークシートを各班で作成し、掲示したものを個人で自由に見て回る形式としたが、３年生では、他の班のワークシートを見る中で、班の思考にどのような変化や深まりがあるかを見取るため、班活動の形をとった。自分の班の式・表・グラフだけでは特徴をつかめなかったものの、他の班のものと比較することで、二次関数の特徴が理解できたようである。

表の特徴について

健　司：ん？
生徒A：どうしたの？
（健司は黙々と y の増加量を調べ、ワークシートに書き込んでいる）
生徒B：増え方は一定じゃないよね。
里依奈：あっ！
健　司：そう、増え方の増え方が一定になってるんだよ。

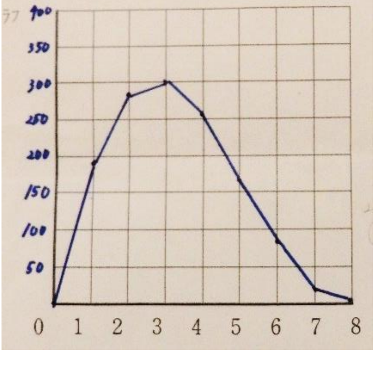
これ以後、健司は他の班の表にも同様の特徴があるか調べるようになり、率先して書き込みを行うようになった。一次関数の表からは、yの増加量が一定であることを見出したが、三次関数の表からは特徴が見つけられず、書き込みはなかった。



（yの増加量が５２、４４、３６、…と８ずつ減っているという、健司たち４班の書き込み）

グラフが直線になるか、曲線になるか

１班のグラフ（三次関数）はプロットした点が直線で結ばれ、折れ線グラフになっていた。

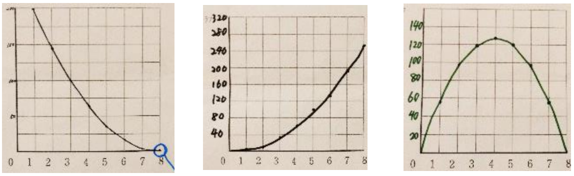


（１班のグラフ）

健　司：このグラフって折れ線になるの？曲線じゃないの？
生徒B：曲線だと思うけど…。
里依奈：でも、なんで曲線かって言われると理由は分からないよね。
健　司：じゃあ、とりあえず理由は分からないって書いておこうよ。

このように、いくつかの班で折れ線グラフに対する疑問が出されたが、明確な決め手はないようだった。

二次関数のグラフの形状について

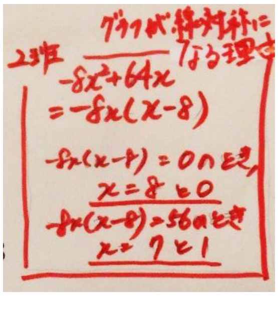


（左から順に２、３、４班のグラフ）

以下、２班でのやりとり
那　津：反比例みたいだね。
和　央：でも、yが0になるから違うんじゃない？
（左上図のように $x = 8$ の点を囲んで疑問点とした ）

健司たち４班は放物線の全体像が見えていたため、二次関数ではグラフが線対称になるという性質があるのではないかと考えていた。ということもあってか、２班の疑問に対して以下のような反応をしていた。
健　司：ここから、こうなるんじゃない？
（右斜め上に向かって、2班のグラフを左右対称にしたような形を指で描きながら）
里依奈：そうそう、私も続きがあると思う。

各班、予測の域で二次関数のグラフが線対称になると考えていたが、４班のグラフを見た２班ではその理由を以下のように考えていた。
和　央：yに0とか56とか代入すると、答えが2つ出てくるよね。
那　津：二次方程式になるからね。



（グラフが線対称になる理由）

関数 $y = ax^2$ の式・表・グラフの特徴についてのまとめ

以上の班活動を経て、全体で各班での学びをつなげ、関数 $y = ax^2$ の式・表・グラフの特徴について考察し、まとめた。

まず、表の特徴については、健司の気付きが共有された。さらに、二次関数の表の特徴を浮き彫りにするために、１班が扱っていた三次関数の表でも y の増加量の増え方について調べるように促すと、多くの生徒が特徴に気付き、n 次関数では、第 n 階差が一定になるのではないかと一般化した。実際に、四次関数（$y = x^4$）で実験し、予想が正しいことを確認した。（本題からそれると判断したため、帰納的な方法での確認のみにとどめた）

また、グラフが直線か曲線かについては、yの増加量が一定でないからだという那津の発言でみな納得したようで、先述した表の特徴とグラフを関連付けることで、関数 $y = ax^2$に関する概念が固まっていった。

グラフの形状を扱う際に、 $y = ax^2$よりも高次の関数にも触れた。普段、継続的に学習に取り組むことができない誠司が興味を示し、「十次関数はどうなるんですか？」と質問してきたり、インターネットで調べている姿が見えたりしたのはうれしい誤算だった。

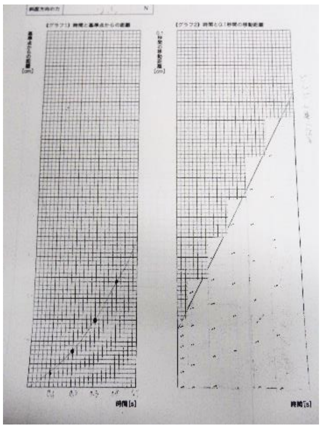
また、本筋からは逸れるが、健司の豊かな数的感覚に驚かされたことがあった。$y = 4x^2$の表を見ていた健司がいきなり、「先生、電卓貸してください」といってきたのだ。理由を尋ねると、いくつかの平方数の和が別の平方数の和と等しくなっているのではないかと考えたようであった。結果的に予想は外れたのだが、「１００＝６４＋３６」や、「１４４＋１６＋４＝１００＋６４」を見出し、得意げにしていた。そこでは本人を称賛するにとどめたが、ピタゴラス数にもつながる発見であり、後の単元『三平方の定理』で扱った。

（２）現実の世界の文脈で関数 $y = ax^2$を捉える（第６、７時）

「自由落下」という現実世界の文脈で、構築してきた関数 $y = ax^2$の概念を補強する場を設けた。理科で「斜面で球を転がす」実験をしていたことから、教科横断的な授業ができたらと考え、取り組んだ。実験から行い、実際の値を用いて現象を表・グラフで表し、式化しようと試みたが、理想値から外れた値を扱う難しさ、生徒がよりどころとする数学的知識を整理できていなかった状況など、教師側の準備不足や認識不足によって、生徒を混乱させてしまった。

その中でも那津のいる班は、１時間目に彼の主導で式化に至っていた。この段階で進捗状況にばらつきがあり、グラフが予想に反して曲線にならず式化に至っていない班が多かった。そこで、各班のデータを回収し、状況を掴んだ上で、２時間目はまず、班を解体し、意見を交流させて進捗状況の調整を図った。

その中で、那津は１秒、２秒、３秒、…とそれぞれの場合で計算した比例定数が異なることに気付いた。悩んだ結果、それぞれの比例定数の平均値をとることで「自由落下」を式化した。



（斜面で球を転がす実験の際に理科で用いたワークシート）

y の値が
左：基準点からの距離
右：0.1 秒間の移動距離

全体で、特定の班の式化に触れた後、上図（授業で用いていたワークシートの裏面に印刷していた）に立ち返り、右の直線のグラフが（1）で述べた健司の表での気付きと関連がある事に言及すると、みな納得していたようだった。以下は、この授業の感想である。

生徒C：自分で１から考えてやるので、たまにはこのようなものもやれば良いと思う。

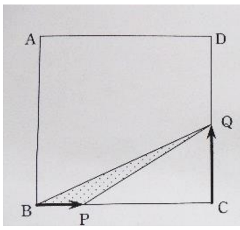
生徒D：理科のことに触れてやることで、同時に数学の知識についても深められた。

里依奈：理科と数学が密接に関わっているとわかった。難しいが、分かると面白いと思った。

（３）数学の世界の文脈で関数 $y = ax^2$を捉える（第８時〜10 時）

「動点問題」という現実世界の文脈で、構築してきた関数 $y = ax^2$の概念を補強する場を設けた。

まず、１時間目には、次頁に示す関数 $y = ax^2$ が現れる動点問題を全体で確認しながら解いた。そして、類題を自分たちで作成し、分担して解いていくことを投げかけ、どの条件を変更するとよいか問いかけた。



・１辺が４cmの正方形
・点Ｐは点Ｂを出発して
　毎秒１cmで左回りに進む。
・点Ｑは点Ｃを出発して
　毎秒２cmで左回りに進む。
・２点は同時に出発し、出発してx秒後の△PBQ の面積を$y$cm²とする。（再び $y=0$ になるまで）

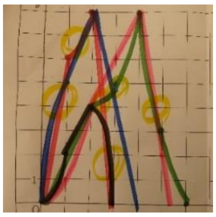
（１時間目に扱った動点問題）

すると、幸正や祥平といった、数学に苦手意識を持っている生徒が積極的に提案した。

幸　正：（正方形でない）形。
祥　平：（正方形の）１辺の長さ。
生徒Ｅ：（点が進む）速さ。
生徒Ｆ：（点が進む）方向。
幸　正：２点が出発する時間をずらす。途中で休む。
（特に最後の提案については、多くの生徒がそんなのアリか？という反応）

様々なアイデアを認め、２時間目以降に取り組む課題とした。（ここで採用しなかったアイデアは考査問題に活用した）

１時間目と同じ正方形で、２点が出発する場所、進む方向と速さを変えた５つの問題(教師側で設定)を各班に割り振り、解くことにした。５つの班のグラフを１つにまとめると、交点がいくつかできたので、求めることになった。(以下の丸で囲んだ６か所)



（教師がグラフを１つにまとめたもの）

一部、原点を通らない二次関数を含んでいる。

誠司は１つ目の二次方程式の解に納得がいっていないようだった。

誠　司：解が０しかないです。
教　師：ということは？
里依奈：交わらないんだよ、きっと。

６つの交点は前述したような「交わりそうで交わらない」状況（あえて交わるように教師がグラフをかいた）や、「負の数は明らかに解ではないが、正の数であれば必ず解か」といった、解の吟味が必要な場面ができるように数値設定をした。結果として、展開、因数分解、平方根、二次方程式の総復習をすることができた。

３．ふりかえり

次年度への省察を２点述べる。

１点目は、既習の関数だけでなく、上の学年で学習するようなものも比較対象に加えることについてである。以前から留意して取り組んできたが、混乱が広がるからと教師主導の側面が強かった。しかし、今年度はじっくり班活動で取り組むようにした。教師側が想定していた混乱は全くなく、じっくり取り組むことで深い概念形成につながると感じた。

２点目は、基本事項すらも文脈の中で習得していく「ロングスパンの単元構成」についてである。教科書が基本の習得→応用問題という流れになっていることから、これまで何の疑いもなくこのような流れで授業をしていた。今年度、１つの文脈で数時間学習するような、長いスパンの単元構成を心掛けた。生徒主体で進める分、軌道に乗るまで時間はかかるが、加速度的に理解が深まっていくように感じた。そして、何より協働の中で、生徒が教材に没入する場面を多く見てきた。

これらの感覚を裏付けとして、年度末に行ったアンケートで「授業が楽しいか」で８割強、「理解度が上がったか」で５割強の生徒が上昇傾向(➚)を選択した。(下降傾向を選択した生徒はそれぞれの項目で１名ずつ)このことから、今年度の実践の方向性は継続し、改良を加えていきたい。

また、徹底したドリル型の授業よりも「できた・分かった」が少なくなると、生徒の数学に向かう姿勢に悪影響を及ぼすと考え、後からフォローの授業が必要になっている現状がある。今年度以上に、計画的で綿密な単元構成を心掛けたい。さらに、単元間や学年間のつながりも意識したより長いスパンでの授業も視野に入れて教材研究を進めていきたい。

「生徒の発想は純粋で面白く、それを見逃さず伸ばしたい」と考えていた初任の気持ちを忘れず、安きに流されず、挑戦する姿を見せられる教師でありたい。

【引用文献】
牧田秀昭・秋田喜代美、「教える空間から学び合う場へ」、東洋館出版社、2012、p118～p145
小島寛之、「数学でつまずくのはなぜか」、講談社、2008
小島寛之、「世界は２乗でできている」、講談社、2013
熊倉啓之、「数学的な思考力・表現力を鍛える授業24」、明治図書、2011
G.ポリア、「いかにして問題をとくか」、丸善出版、1954